Universidad de Granada
Departamento de Análisis Matemático
Asignatura: Cálculo
Primer curso de la Licenciatura de Ciencias Matemáticas

Ejercicios para hacer en clase el 20/10/2000

Funciones continuas. Mínimos mayorantes y máximos minorantes

1. Estúdiese la continuidad de la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, definida por $f(x)=xE(1/x)$ si $x\neq 0$, $f(0)=1$.

2. Sea A un conjunto no vacío de números reales. Para cada $x\in\mathbb{R}$ definamos la "distancia de x a A" por: $\operatorname{dist}(x,A)=\operatorname{ínf}\{|x-a| : a\in A\}$. Pruébese que para todos $x,y\in\mathbb{R}$ se verifica que:

$$|\operatorname{dist}(x,A)-\operatorname{dist}(y,A)|\leqslant|x-y|$$

   Dedúzcase que la aplicación $x\mapsto\operatorname{dist}(x,A)$ es continua.

3. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continua, mayorada y tal que para todos $a,b\in\mathbb{R}$ con $a<b$, se verifica que $\sup f(]a,b[)=\sup f(\mathbb{R})$. Pruébese que f es constante.

4. Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función continua verificando que $f(a)<0$, $f(b)<0$ y $f(c)>0$ para algún $c\in]a,b[$. Pruébese que hay dos números u, v tales que $a<u<v<b$, $f(u)=f(v)=0$ y $f(x)>0$ para todo $x\in]u,v[$.